**О НЕЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАНТАХ МЕТОДА ХОРД И СТЕФФЕНСЕНА.**

Рассматривается нелинейное уравнение:

 (1)

Для решения нелинейного уравнения (1.1) А.С.Сергеевым [] был предложен операторный вариант метода хорд, локально сходящийся со сверхлинейной скоростью.

Итерационная процедура имела следующий вид:

,  (2)

Достоинство метода (2) состоит в том, что метод применим в том случае, если оператор *f* лишь непрерывен в области *D* и первые и вторые разделенные разности оператора *f* равномерно ограничены в *D*. К числу важных недостатков метода (2) является необходимость иметь в своем распоряжении достаточно хорошие начальные приближения и , а также знание оценок ряда глобальных констант, нахождение которых часто представляет задачу, сравнимую по трудности с решением задачи (1).

Положим, что в интересующей нас области  для каждого  выполняется условие:

 (3)

Рассматривается итерационный процесс (2).

Относительно сходимости процесса (2) справедлива

**Теорема 1.** Пусть в области *D* выполняются условие (3) и элементы ,  таковы, что

,,,. (4)

и справедливо соотношение 

Тогда итерационный процесс (1.391) с квадратичной скоростью сходится к единственному в  решению *x\** уравнения (1).

***Доказательство***

Выведем вначале некоторые соотношения:



 (5)

Пусть . Так как , то в силу теоремы Банаха существует оператор, обратный оператору  и . Далее, имеем соотношение . Используя аналог интерполяционной формулы Ньютона для операторов и условия теоремы, получаем оценку

 (6)

Покажем, что при переходе от точки x1 к точке x2, соотношение (5) не меняется. Имеем



И если потребовать, чтобы выполнялось соотношение , а это неравенство будет выполнятся при , то получим, что соотношение (5) при переходе от точки  к точке  не нарушается.

Из соотношения (6) следует квадратичная сходимость последовательности , определённой процессом (2), к  – решению уравнения (1).

Докажем единственность полученного решения в сфере . Пусть в существует еще одно решение . Имеем:



Если  то решений будет не более одного. Нетрудно найти радиус области единственности. Он равен .

Найдём радиус сферы существования решения. Для этого рассмотрим ряд соотношений, которые следуют из приведённых выше неравенств:



Индуктивные рассуждения позволяют получить оценку



из которой следует, что радиус существования решения .

Чтобы решение в  существовало и было единственным, достаточно выполнения соотношений  и 

***Теорема доказана.***

Предложенные ниже нелокальные варианты метода хорд “работают” при “плохих” начальных приближениях и некоторые из вариантов продолжаемы даже в том случае, если на каких-либо элементах ,  оператор  обращается в нуль.

Кроме того, условие (3) часто представляется достаточно обременительным: в ряде важных задач условие симметричности (3) не выполняется, в связи с чем это условие заменяется другим [2]:



Следствием из последнего соотношения является равенство (аналог интерполяционной формулы для операторов)

 (7)

которое положено в основу наших дальнейших рассуждений.

Введение демпфирующего множителя позволяет построить следующий полулокальный итерационный процесс:

Шаг 1. Решается линейное уравнение относительно поправки 

 (8)

Шаг 2. Очередное приближение находится по правилу

 (9)

Шаг 3. Если  и(или)  (ε- параметр останова) – конец просчетов, иначе

Шаг 4. Если , то , иначе

 (10)

и переход на шаг 1.

**Теорема 2.** Пусть в области ,  существует -решение уравнения (1) и выполняются следующие условия:

a) .

b) .

c) .

Тогда итерационный процесс (8) – (10) со сверхлинейной скоростью (локально с квадратичной) сходится к . Оценки погрешности *n*-го приближения имеет вид

.

***Доказательство.***

Используя аналог интерполяционной формулы Ньютона для операторов (7) и условия теоремы, имеем оценку

 (11)

В силу (10) ∀*n*, для которого  справедлива цепочка равенств

. (12)

перепишем соотношение (11) в виде

 (13)

Пусть  таково, что, тогда в силу (13) , в этом случае в силу (10) .

Рассмотрим , которое, в силу (12) равно  и так как , то .

Таким образом, последовательность итерационных параметров  монотонно возрастает, а последовательность элементов - монотонно убывает с ростом *n*. Индуктивные рассуждения позволяют получить оценку , из которой следует слабая сходимость элементов , генерируемых алгоритмом (8) – (10), к .

Справедливо и более сильное утверждение: так как из (11) и условий теоремы имеем, что , то

 (14)

Из (14) следует фундаментальность последовательности  и в силу полноты пространства *X* существование предельного элемента, который, как нетрудно убедиться, является решением уравнения (1). Оценка погрешности n-го приближения получается переходом к пределу в (14) при . Имеем.

Радиус сферы определяем стандартным образом.



Индуктивно получаются оценки



Переход к пределу в последнем неравенстве при n→∞ позволяет утверждать, что все последовательные приближения не выходят за пределы сферы .

***Теорема доказана.***

**Замечание.** Локальная квадратичная скорость сходимости процесса (8) – (10) следует из (13) при *βn=1.* А.С.Сергеевым [1] доказана лишь локальная сверхлинейная скорость сходимости процесса (2).

В теореме 2 требовалось существование apriori существование - решения уравнения (1) и принадлежность его замыканию сферы : Предлагаемая ниже теорема позволяет снять это требование.

**Теорема 3.** Пусть оператор *f* удовлетворяет в *D* тем же условиям, что и в теореме 2, исключая требование существования , существует такое число , что выполняются соотношения

 (15)

тогда уравнение (1) имеет решение , к которому сходятся итерации (8) - (10), (15), начиная с .

При этом справедлива оценка погрешности n-го приближения



***Доказательство.***

Так как выполняются условия теоремы 2, то справедлива оценка (13), , а в силу условия (15)



и при этом величина  такова, что . Таким образом, локальная квадратичная сходимость наступает на элементе , для которого справедливо соотношение .

Стандартным рассуждением доказывается фундаментальность последовательности элементов , сохранение условия (15) при переходе от точки  к точке  и справедливость оценки



Так что в сфере *D* существует предельный элемент  и справедлива оценка

 (16)

Переходя к пределу в (16) при , имеем, что -решение уравнение (1). Оценка погрешности n-го приближения следует из (16) и соотношения



***Теорема доказана.***

Теоремы аналогичные теоремам 2 и 3 можно доказать относительно процесса аналогичному процессу (8) - (10), где  выбирается следующими способами:

1. ***одношаговые методы неполного прогноза***

1-ый способ – . (17)

Очередное приближение находится по формуле ;

2-ой способ – . (18)

Очередное приближение находится по формуле ;

***Теорема доказана.***

Пусть на каком-нибудь шаге итерационного процесса оператор  обращается в нуль, в этом случае в итерационном процессе поправку  находим, решая уравнение на шаге 1.

. (19)

На шаге 2 вносим поправки в вектор ,

 (20)

На шаге 3 проверяем условие окончания процесса.

На шаге 4 изменяем шаговую длину по формуле (18) и переходим на шаг1.

Откуда оценка для  имеет вид



. (21)

**Теорема 4.** Пусть в области *D* существует - решение уравнения (1). Тогда при выполнении условия (18), условия б) теоремы 2 и соотношения

 (22)

итерационный процесс (19), (20), (18) со сверхлинейной скоростью сходится к  и справедливы оценки погрешности *n*-го приближения:

 (23)

***Доказательство.***

Представим уравнение (1) в “неявном” виде



В силу условий теоремы и аналога формулы Ньютона для операторов имеем оценку



Из (18) следует, что , в силу чего оценка для  принимает вид

 (24)

Так как в силу (22) , то

.

Поскольку , тогда *β2>β1*.

С учетом последних соотношений имеем, что



Индуктивные рассуждения позволяют получить оценку

. (25)

При этом последовательность элементов  монотонно убывает, а последовательность итерационных параметров  монотонно возрастает.

Переходя к пределу в (25) при , убеждаемся в том, что последовательность элементов , генерируемая формулами (19), (20), (18) сходится по функционалу к . Стандартными рассуждениями нетрудно показать сильную (по норме) сходимость последовательности элементов  к и справедливость оценки (23).

Сверхлинейность процесса следует из (24) при .

***Теорема доказана.***

Относительно оператора *f* обычно полагают, что  и в D существует ограниченный обратный оператор . В ряде важных практических задач оператор *f* лишь непрерывен в *D* и  выполняются условия

 (26)

Здесь – разностное отношение первого порядка оператора *f* []. Ниже будем рассматривать уравнения с негладкими операторами.

**Нерегуляризованные полулокальные алгоритмы. Алгоритмы типа Стефферсона.**

Пусть оператор  и такой, что выполняются условия (26). Рассмотрим итерационный процесс

 (27)

Используя аналог интерполяционной формулы Ньютона для операторов [] и соотношение (27), имеем оценку



 (28)

Соотношение (28) является базовым при рассмотрении семейства итерационных процессов, которые получаются при различных способах введения итерационных параметров  (способах регулировки шага). Если, следуя идеям работы [3], определить итерационные параметры  следующим

образом:

 (29)

, ,

то, взяв  таким, чтобы выполнялось соотношение , из (28), (29) имеем, что ;  и . Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что итерационные параметры образуют монотонно возрастающую последовательность, нормы последовательности элементов  монотонно убывают к нулю, все , и если в области  решение  уравнения (1) существует, то итерационный процесс (27), (29) сходится к . Нетрудно проверить, что процесс (27), (29) с  имеет квадратичную скорость сходимости. Действительно, из (28) при  имеем, что  или . Из последнего неравенства следует, что достаточным условием квадратичной сходимости процесса (27) с  является условие . В процессе реализации алгоритма (27), (29) это условие при некотором номере *k* начинает выполняться. Тогда, как следует из (29),  для  будут равными единице. Таким образом, нами доказана

**Теорема 5.** Пусть в области  существует решение  и оператор *f* удовлетворяет условиям (26). Тогда, если , итерационный процесс (27), (29) со сверхлинейной (локально квадратичной) скоростью сходится к .

**Замечание 1.** Итерационный процесс лишь символически записывается в виде (27). В действительности реализуется следующая пошаговая процедура, при этом  находится по некоторому правилу.

Шаг 1. Решается линейная система



Шаг 2. 

Шаг 3. Если  и (или) (– параметр останова, ), то конец просчётов, иначе переход на шаг 4.

Шаг4. Если , то , иначе  находим по правилу (29) и переход на шаг 1.

**Замечание 2.** При использовании процесса знание оценок глобальных констант *K, B, M* не требуется, важен лишь факт их существования.

**Замечание 3.** В работе [4] доказана локальная квадратичная сходимость процесса (27) с  для случая, когда оператор разделённой разности первого порядка симметричен, т.е. выполняется условие . Это требование, как показано в [2], является чрезвычайно обременительным и ему не удовлетворяют операторы разделённой разности первого порядка во всех важных для практики случаях.

Выше доказана локальная квадратичная сходимость процесса (27) с  без использования симметричности оператора разделённой разности первого порядка.

Требование существования ограниченного оператора во всей области D является также достаточно обременительным условием. Попытаемся снять это условие, для чего, следуя идеям работы [3], введём соотношения, связывающие нормы операторов  и :



Здесь 

Если , то в силу теоремы Банаха существует оператор, обратный оператору  и справедлива оценка . Используя аналог интерполяционной формулы Ньютона для операторов и формулу (27) при , получим оценку

 (30)

Тогда определим  так, чтобы при переходе от точки  к точке выполнялось соотношение , где  . Неравенство  справедливо при . Нетрудно получить радиус области существования решения уравнения (1) в сфере . Учитывая (30), получаем оценку для сходящегося процесса (27) с 



 (31)

Наряду с оценкой (31) может быть получена оценка



. (32)

Найдём условие, при выполнении которого решений в области  не более одного. Положим, что в  существуют два решения  и . Тогда, если имеют место соотношения (26), получим оценку

 (33)

Здесь . Если в (33) потребовать, чтобы  или  то в сфере  будет не более одного решения.

В условиях сходящегося процесса (27) с  рассмотрим неравенство

 (34)

которое равносильно утверждению . Из (34) следует оценка

. (35)

Если в качестве  взять правую часть соотношения (32) и потребовать выполнение условия

 (36)

то неравенство (36) также равносильно утверждению . Из оценки (36) имеем соотношение, связывающее нормы поправок на соседних шагах:

 (37)

Так как  то  Тогда из выполнения соотношения

 (38)

будет следовать неравенство (37). Таким образом, из сходимости процесса и утверждения  следует (38). С другой стороны, если выполняется соотношение (38), то . В самом деле, соотношение (38) эквивалентно

 (39)

Но в условиях сходящегося процесса величина  ‑ минимальный радиус единственности, поэтому из (39) и сходимости процесса следует, что , а это условие того, что .

Таким образом, может быть сформулирована

**Теорема 6**. Пусть оператор *f* удовлетворяет в D условиям (26). Тогда итерационный процесс (27) с  при выполнении соотношения (38) с квадратичной скоростью сходится к единственному в  решению уравнения (1).